Dodatna nastava iz matematike u MG-u

POLINOMI

Predavač: Peki

1. Dokazati da polinom $x^n + 2nx^{n-1} + 2n^2x^{n-2} + ...$ ne može imati sve realne nule.

2. Dokazati da polinom $x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ ima tačno 4 nule modula 1.

3. Neka je $P(x)$ polinom sa realnim koeficijentima takav da je $P(x) > 0$ za svako $x \geq 0$. Dokazati da postoji $n \in N$ tako da polinom $(1+x)^n P(x)$ ima sve nenegativne koeficijente.

4. Ako je $a_0 \geq a_1 \geq ... \geq a_n > 0$ i ako je $a$ nula polinoma $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, dokazati da je $|a| \leq 1$.

5. Neka je $p$ prost broj i neka je $g(x)$ polinom stepena $d$ sa celim koeficijentima takav da je :

   (a) $g(0) = 0, g(1) = 1$;

   (b) za svako $n \in N$, ostatak deljenja $g(n)$ sa $p$ je 0 ili 1.

   Dokazati da je $d \geq p - 1$.

6. Ako je vrednost $P(x)$ celobrojna za svaki ceo broj $x$, pokazati da postoje celobrojni koeficijenti $a_0, ..., a_n$ takvi da je

$$P(x) = a_n\binom{x}{n} + a_{n-1}\binom{x}{n-1} + ... + a_0\binom{x}{0}.$$

7. Pretpostavimo da je za dati prirodan broj $m$ polinom $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ deljiv sa $m$ za svako celobrojno $x$. Dokazati da je tada $n!a_n$ deljivo sa $m$.

8. Neka je $n$ prirodan broj i $P(x)$ polinom $2n-$tog stepena za koji važi $P(0) = 1$ i $P(k) = 2^{k-1}$ za $k = 1, 2, ..., 2n$. Dokazati da je $2P(2n+1) - P(2n+2) = 1$.

9. Za polinom $P(x)$ $n$-tog stepena važi $P(i) = \frac{1}{i}$ za $i = 1, 2, ..., n+1$. Naći $P(n+2)$.

10. Neka su $P$ i $Q$ različiti polinomi takvi da je $P(Q(x)) \equiv Q(P(x))$. Dokazati da je polinom $P(P(x)) - Q(Q(x))$ deljiv polinomom $P(x) - Q(x)$.

11. Ako polinom $P$ sa realnim koeficijentima za dovoljava za svako realno $x$ $P(\cos x) = P(\sin x)$, dokazati da postoji polinom $Q$ takav da je za svako $x$, $P(x) = Q(x^4 - x^2.)$

12. Odrediti sve nenula polinome $P \in R[x]$ za koje važi:

    (a) $P(x^2) = (P(x))^2$;

    (b) isti tekst uz uslov $P(x^2 - 2x) = (P(x-2))^2$;

    za svako realno x.

13. Ako je vrednost realnog polinoma nenegativna za svako realno $x$, dokazati da se on može prikazati kao zbir kvadrata dva realna polinoma.

14. Ako jednačina $ax^2 + (c-b)x + (e-d) = 0$ ima realne korene veće od 1, gde je $a, b, c, d, e \in R$, dokazati da jednačina $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ima bar jedan realan koren.

15. Naći sve realne polinome $P(x)$ takve da je $P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$ kad god je $ab + bc + ca = 0$.